Integrability test for evolutionary lattice equations of higher order

V.E. Adler

submitted to J. of Symbolic Computations
[arXiv:1408.5726]

ИТФ им. Л.Д. Ландау · Черноголовка · 5 сентября 2014

План доклада

- **что изучается »** цепочки $\partial_t(u_j) = f(u_{j-m}, \ldots, u_{j+m})$
- формальная симметрия $D_t(G) = [f_*, G]$
- уравнения типа КдФ: как разрешить уравнение $D(y) = b[u]$ **?**
  - интегрирование по частям
  - оператор гомотопии
- цепочки: как разрешить уравнение $T^m(y) - a[u]y = b[u]$ **?**
  - обращение оператора
  $$(T^m - a)^{-1} = T^{-m}(1 + aT^{-m} + (aT^{-m})^2 + \ldots)$$
  - интегрирование по частям **« основной результат**
  - дискретный оператор гомотопии
- программа на Mathematica, примеры

Обозначения

- u_j — динамические переменные, $j \in \mathbb{Z}$;
- $\mathcal{F}$ — дифференциальное поле функций от конечного числа u_j;
- $\mathbb{K}$ — поле констант, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;
- $\partial_j = \partial/\partial u_j$, $f^{(j)} = \partial_j(f)$ — частные производные;
- $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — оператор сдвига

$$T^k(f(u_i, \ldots, u_j)) = f(u_{i+k}, \ldots, u_{j+k});$$

- рассматриваем только автономные цепочки

$$u_{j,t} = f(u_{j-m}, \ldots, u_{j+m}) = T^j(f(u_{-m}, \ldots, u_m))$$

и, для краткости, j не пишем.

1 Формальная симметрия

Рассмотрим цепочку

$$u_{,t} = f(u_{-m}, \dots, u_m). \tag{1}$$

Определение интеграбилити известно [1,2]: это разрешимость уравнения

$$D_t(G) = [f_*, G], \tag{2}$$

где f_* оператор линеаризации

$$f_* = f^{(m)}T^m + \dots + f^{(-m)}T^{-m},$$

G формальная симметрия или формальный оператор рекурсии

$$G = g_k T^k + g_{k-1}T^{k-1} + \dots, \quad g_j \in \mathcal{F}.$$

---

[1] Mikhailov, A.V., Shabat, A.B., Sokolov, V.V., 1991. The symmetry approach to classification of integrable equations. In: What is Integrability? Ed.: V.E. Zakharov, Springer-Verlag, pp. 115–184.

[2] Yamilov, R.I., 2006. Symmetries as integrability criteria for differential difference equations. J. Phys. A 39(45), R541–623.

Замечание. Вот математическое определение $f_*(g) = \left.\dfrac{df[u+\epsilon g]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$:

```
df[f_] := D[f /. u[j_] :> u[j] +
              eps dif[u[j]], eps] /. eps -> 0
dt[f_, g_] := df[f] /. dif[u[j_]] :> T[g, j]
```

Дифференциал `df` можно определить и так (работает вдвое быстрее!):

```
vars[f_] := Union[Cases[f, _u, {0, Infinity}]]
df[f_] := Plus @@ (D[f, #]dif[#] & /@ vars[f])
```

★ Команда `vars`, возвращающая список переменных из f, понадобится нам и в дальнейшем.

Уравнение $D_t(G) = [f_*, G]$ это симметрийный тест: рекуррентные соотношения

$$f^{(m)}T^m(g_j) - g_j T^j(f^{(m)}) = b_j[f, g_k, g_{k-1}, \dots, g_{j+1}], \quad j = k, k-1, \dots$$

должны быть разрешимы относительно $g_j \in \mathcal{F}$.

Однако, имеются два вопроса:

1) чему равно k? В непрерывном случае $k = 1$ wlog, благодаря извлечению корня $G \to G^{1/k}$, но в разностном корень не всегда извлекается.

2) как разрешать-то?

★ Ответ на первый вопрос: $k = m$.

Теорема [arXiv:1406.1522] Если цепочка (1) допускает симметрии сколь угодно высокого порядка, то уравнение (2) имеет решение вида

$$G = f^{(m)}T^m + \cdots + f^{(1)}T + g_0 + g_{-1}T^{-1} + \cdots .$$

★ Ответ на второй, то есть, алгоритм решения уравнения

$$T^m(y) - a[u]y = b[u],$$

и составляет содержание доклада.

2 Непрерывный случай

Для тренировки, рассмотрим уравнение

$$D(y) = b(u, u_1, \ldots, u_r), \tag{3}$$

где $D = u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \ldots$ оператор полной производной.

2.1 Интегрирование по частям [3]

Для разрешимости (3) необходимо, чтобы функция b была линейна по старшей переменной: $b^{(r)} = B(u, u_1, \ldots, u_{r-1})$. Сделаем замену

$$y = \tilde{y} + \int B\, du_{r-1},$$

тогда $D(\tilde{y}) = \tilde{b}$, где $\tilde{b}$ не зависит от u_r. Повторяя, либо получим ответ (не более чем за r шагов), либо докажем, что решение не существует.

---

[3] Auteur anonyme

2.2 Оператор гомотопии

Имеет место формула

$$\operatorname{Im} D = \ker \mathsf{E},$$

где $\mathsf{E} = \delta/\delta u$ это оператор Эйлера, или вариационная производная,

$$\mathsf{E} = \partial_0 - D\partial_1 + D^2\partial_2 + \cdots + (-D)^j\partial_j + \ldots.$$

Это значит, что для разрешимости (3) необходимо и достаточно, чтобы $\mathsf{E}(b) = 0$. Если это выполнено, то y вычисляется явно [4,5]:

$$y = H(b) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} I(b)[\lambda u]\, d\lambda, \quad I = \sum_{i=0}^{r-1} u_i \sum_{k=i+1}^{r} (-D)^{k-i-1}\partial_k.$$

[4] Hereman, W., Deconinck, B., Poole, L.D., 2006. Continuous and discrete homotopy operators: A theoretical approach made concrete. Math. and Computers in Simulation 74(45), 352–360

[5] Olver, P.J., 1993. Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., Graduate Texts in Math. 107, New York: Springer-Verlag, 1993.

Замечание. Для комплекса $d_i : L_i \to L_{i+1}$, $d_i d_{i-1} = 0$, операторами гомотопии называются отображения $h_i : L_{i+1} \to L_i$,

$$\dots \rightleftarrows L_{i-1} \underset{h_{i-1}}{\overset{d_{i-1}}{\rightleftarrows}} L_i \underset{h_i}{\overset{d_i}{\rightleftarrows}} L_{i+1} \rightleftarrows \dots$$

удовлетворяющие тождеству

$$h_i d_i + d_{i-1} h_{i-1} = \mathrm{id}_i.$$

Отсюда следует точность комплекса: $d_i(\omega_i) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_i = d_{i-1}(h_{i-1}(\omega_i))$.

программа на Mathematica

Интегрирование по частям заметно быстрее!

3 Дискретный случай

$$T^m(y) - a[u]y = b[u] \tag{4}$$

Простые свойства:

» Если $a \neq T^m(h)/h$, то решение единственно (если существует).

» Если $a = T^m(h)/h$, то имеется нетривиальное ядро $\ker(T^m - a) = \mathbb{K}h$.

Ещё обозначения:

★ $\underline{\mathrm{ord}}\, f$, $\mathrm{ord}\, f$ — порядки функции $f \in \mathcal{F}$

$$\underline{\mathrm{ord}}\, f = \min\{j : f^{(j)} \neq 0\}, \quad \mathrm{ord}\, f = \max\{j : f^{(j)} \neq 0\}, \quad f \neq \mathrm{const},$$
$$\underline{\mathrm{ord}}\, f = +\infty, \quad \mathrm{ord}\, f = -\infty, \quad f = \mathrm{const};$$

★ $J(f)$ — индекс-интервал

$$J(f) = [\underline{\mathrm{ord}}(f), \mathrm{ord}(f)], \quad J(\mathrm{const}) = \varnothing;$$

★ Порядки коэффициентов уравнения будем обозначать

$$J(a) = [q_1, q_2], \quad J(b) = [p_1, p_2];$$

★ $X_k : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — операция экстракции

$$g = X_k(f): \quad g^{(k)} = f^{(k)}, \quad J(g) = J(f^{(k)}).$$

Функция g определена с точностью до прибавления произвольной функции от u_j, $j \in J(f^{(k)}) \setminus \{k\}$. Неформально, g получается зачеркиванием аддитивных членов в f, не зависящих от выделенной переменной u_k.

Эффективность алгоритма зависит от того, как реализованы операции $\underline{\mathrm{ord}}, \mathrm{ord}$ и X_k.

Аргументы f можно найти командой `vars[f]`. Но что, если переменные сокращаются? Для простоты, будем считать, что $\mathcal{F}$ — поле рациональных функций. Тогда команда `vars[Together[f]]` возвращает всамделишные аргументы f.

Экстракцию можно определить формулой

$$X_k(f) = \int f^{(k)} du_k,$$

где **1)** подынтегральное выражение приведено к виду, не содержащему u_j при $j \notin J(f^{(k)})$; **2)** постоянная интегрирования также не зависит от этих переменных.

Таким образом, в рациональном случае работает

```
X[k_, f_] := Integrate[Together[D[f, u[k]]], u[k]]
```

чем мы и будем пользоваться. Альтернативно, можно принять

$$X_k(f) = f|_{u_j = c_j,\ j \notin J(f^{(k)})} \ ,$$

где c_j любые константы, такие что правая часть определена (например, если f многочлен, можно взять $c_j = 0$).

Оба определения оставляют желать лучшего, особенно, если $\mathcal{F}$ содержит алгебраические функции, функции с теоремами сложения, неявные, заданные как решения диф. уравнений и т.п..

3.1 Обращение оператора

Воспользуемся тождеством

$$(T^m - a)^{-1} = T^{-m}(1 + aT^{-m} + (aT^{-m})^2 + \dots)$$

1) $a = \mathrm{const} \neq 0$**.** Пусть $b \neq \mathrm{const}$, тогда $J(y) = [p_1, p_2 - m]$ (если y существует). Рассмотрим следствие из (4):

$$y - a^r T^{-rm}(y) = T^{-m}(b) + \dots + a^{r-1}T^{-rm}(b), \quad r \geq 1.$$

Если взять достаточно большое r, то функции в левой части зависят от непересекающихся наборов переменных. Отсюда

$$y = c + \sum_{s=1}^{r} a^{s-1}T^{-sm}(b)\Big|_{u_j = c_j,\ j<p_1}, \quad r = \left\lfloor \frac{p_2 - p_1}{m} \right\rfloor.$$

Если $a \neq 1$, то можно обойтись без констант

$$y = 1/(1 - a^r)\sum_{s=1}^{r} a^{s-1}T^{-sm}(b)\Big|_{u_j = u_{j+rm},\ j<p_1}.$$

2) $a = \alpha T^m(h)/h$**.** Этот случай сводится к предыдущему заменой $y = h\tilde{y}$. Чтобы узнать имеет ли a такой вид, нужно исследовать вспомогательное уравнение $T^m(z) - z = \log a - \lambda$ с параметром λ.

3) $a \neq \alpha T^m(h)/h$**.** Продифференцируем (4)

$$T^m(\partial_{j-m}(y)) - a\partial_j(y) = \partial_j(a)y + \partial_j(b)$$

и исключим производные:

$$\sum_s a_s T^{sm}(\partial_{j-sm}(a)y + \partial_{j-sm}(b)) = 0. \qquad (5)$$

Сумма конечна:

$$\left\lfloor \frac{j - \max(p_2, q_2)}{m} \right\rfloor \le s \le \left\lfloor \frac{j - \min(p_1, q_1)}{m} \right\rfloor,$$

а коэффициенты определены соотношением $a_{s-1} = a_s T^{sm}(a)$, $a_0 = 1$:

$$a_s = \prod_{k=s+1}^{0} T^{km}(a), \quad s \le 0, \qquad a_s = 1/\prod_{k=1}^{s} T^{km}(a), \quad s \ge 0.$$

Уравнения для j и $j+m$ отличаются множителем. Исключение $T^{sm}(y)$ в силу (4) приводит (5) к виду

$$A_j y = B_j, \quad A_j = \sum_s T^{sm}(\partial_{j-sm}(\log a)), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

причем $A_j \neq 0$ хотя бы при одном j.

» Во всех случаях — явная формула, которую только остается подставить в уравнение для проверки.

$\boxed{\text{Работает медленно.}}$

» При $a = \mathrm{const}$ уравнение (5) превращается в обобщение $\mathsf{E}(b) = 0$:

$$\sum_s a^{-s} T^{sm}(\partial_{j-sm}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Это необходимые условия разрешимости (4), а если $a \neq 1$, то и достаточные.

» Если решение существует, то оно является рациональной функцией от a, b и функций, полученных из a, b действием T, ∂_j и подстановок $u_j = \mathrm{const}$.

3.2 Интегрирование по частям

Этот метод заключается в применении подстановок вида

$$y = \tilde{y}/A, \quad \tilde{a} = aT^m(A)/A, \quad \tilde{b} = T^m(A)b$$

или

$$y = \tilde{y} - B, \quad \tilde{a} = a, \quad \tilde{b} = b + (T^m - a)(B)$$

приводящих к эквивалентным уравнениям с коэффициентами, зависящими от меньшего числа переменных. За конечное число шагов удаётся или построить решение явно, или доказать что оно не существует.

Условные переходы задаются неравенствами с порядками $J(a) = [q_1, q_2]$, $J(b) = [p_1, p_2]$. Из этих неравенств следует:

— либо наличие понижающих подстановок, причём функции A, B определяются по a, b при помощи экстракции X_k;

— либо неразрешимость уравнения. В этом случае алгоритм должен выдать ненулевое выражение — **препятствие** для существования решения. Его анализ важен в ситуации, когда коэффициенты уравнения содержат произвольные параметры.

1) Случай $a = \mathrm{const} \neq 0$. Если

$$p_1 > p_2 - m,$$

то решение может быть только постоянным, то есть $y = b/(1-a)$ при $a \neq 1$ и $y = c$ при $a = 1$; остаётся только проверить (невязка — препятствие).

★ Это место — единственное, где в ответ вкрадывается произвольная постоянная c.

Если $p_1 \leq p_2 - m$, то из уравнения следует $b^{(p_2)} = T^m(y^{(p_2-m)})$, откуда

$$r = \underline{\mathrm{ord}}\, b^{(p_2)} \geq p_1 + m.$$

Если нет, то решения нет, а выражение $b^{(r,p_2)}$ служит препятствием.

Если да, то $J(b^{(p_2)}) \subseteq [p_1 + m, p_2]$ и замена

$$B = X_{p_2}(b), \quad y = \tilde{y} + T^{-m}(B), \quad \tilde{b} = b - B + aT^{-m}(B)$$

приводит к $J(\tilde{b}) \subseteq [p_1, p_2 - 1]$ (возможно, $J(\tilde{b}) = \varnothing$). Повторяя не более $p_2 - p_1 + 1$ раз, построим решение $y = T^{-m}(B + \tilde{B} + \dots)$ или получим препятствие.

2) Приведение коэффициента a. Пусть теперь $a \neq \mathrm{const}$. Если

$$q_1 \leq q_2 - m \qquad \text{и} \qquad \operatorname{ord} \partial_{q_1}(\log a) \leq q_2 - m \tag{6}$$

(возможно $\partial_{q_1}(\log a) = \mathrm{const}$), то

$$a = A(u_{q_1}, \ldots, u_{q_2 - m})\hat{a}(u_{q_1+1}, \ldots, u_{q_2}), \quad A = \exp(X_{q_1}(\log a)).$$

Тогда подстановка

$$y = \tilde{y}/A, \quad \tilde{a} = aT^m(A)/A, \quad \tilde{b} = T^m(A)b$$

приводит к уравнению с $J(\tilde{a}) \subseteq [q_1 + 1, q_2]$ (возможно, с $\tilde{a} = \mathrm{const}$). Повторяя эту замену, либо придём к случаю 1) или к случаю, когда (6) нарушено, то есть

$$\max(q_1, \operatorname{ord} \partial_{q_1}(\log a)) > q_2 - m. \tag{7}$$

Далее будем считать, что выполнено (7), и оставим a в покое.

3) Приведение коэффициента b.

b « Если $p_2 > q_2$, то сделаем $p_2 \le q_2$, повторяя замену

$$B = X_{p_2}(b), \quad y = \tilde{y} + T^{-m}(B), \quad \tilde{b} = b - B + aT^{-m}(B).$$

★ Вместо этого можно делать более простую замену

$$y = \tilde{y} + T^{-m}(b), \quad \tilde{b} = aT^{-m}(b),$$

но она хуже, потому что сильнее понижает p_1.

» b Если $p_1 < q_1$ и решение существует, то $\operatorname{ord} y \le q_2 - m$ и $-y^{(p_1)} = b^{(p_1)}/a$, откуда

$$r = \operatorname{ord}(b^{(p_1)}/a) \le q_2 - m.$$

Если нет, то решения нет, препятствие $\partial_r(b^{(p_1)}/a)$.

Если да, то $J(b^{(p_1)}/a) \subseteq [p_1, q_2 - m]$ и подстановка

$$B = X_{p_1}(b/a), \quad y = \tilde{y} - B, \quad \tilde{b} = b + (T^m - a)(B)$$

приводит к $J(\tilde{b}) \subseteq [p_1 + 1, q_2]$. Повторяя, приходим к следующему случаю.

4) Решение линейной системы. Задача сведена к случаю $J(b) \subseteq J(a) = [q_1, q_2]$. Если решение существует, то $J(y) \subseteq [q_1, q_2 - m]$.

Если $q_1 > q_2 - m$, то решение может быть только постоянным, остаётся проверить $y = b/(1-a)$.

Пусть $q_1 \le q_2 - m$, тогда из (7) следует

$$r = \operatorname{ord} \partial_{q_1} (\log a) > q_2 - m \geq \operatorname{ord} y.$$

Дифференцируя уравнение, получаем систему с ненулевым определителем:

$$\begin{array}{lcll} a^{(q_1)} y & + & a y^{(q_1)} & = -b^{(q_1)}, \\ a^{(q_1,r)} y & + & a^{(r)} y^{(q_1)} & = -b^{(q_1,r)}. \end{array}$$

Отсюда y однозначно находится, остаётся вычислить невязку-препятствие.

3.3 Дискретный оператор гомотопии [6] для уравнения

$$T(y) - y = b(u_0, \dots, u_r).$$

Аналогично непрерывному случаю

$$\mathrm{Im}(T-1) \oplus \mathbb{K} = \ker \mathsf{E},$$

где $\mathsf{E} = \delta/\delta u$ оператор Эйлера

$$\mathsf{E} = \dots + T^2\partial_{-2} + T\partial_{-1} + \partial_0 + T^{-1}\partial_1 + T^{-2}\partial_2 + \dots$$

Если уравнение разрешимо, то y вычисляется по явным формулам:

$$y = H(b) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} I(b)[\lambda u]\, d\lambda, \quad I = \sum_{i=0}^{r-1} u_i \partial_i \sum_{k=i+1}^{r} T^{-k+i}.$$

$\boxed{\text{Работает медленно.}}$

[6] Hereman et al.

4. Примеры

Итак, тест для цепочки

$$u_{,t} = f(u_{-m}, \dots, u_m)$$

заключается в последовательном разрешении уравнений

$$T^m(g_j) - a_j g_j = b_j, \quad j = 0, -1, -2, \dots, \tag{8}$$

где

$$b_j = \frac{1}{f^{(m)}}\Big(D_t(g_{j+m}) - \sum_{s=-m}^{m-1} f^{(s)} T^s(g_{j+m-s}) - g_{j+m-s} T^{j+m-s}(f^{(s)})\Big),$$

$$a_j = \frac{T^j(f^{(m)})}{f^{(m)}}, \quad g_m = f^{(m)}, \dots, g_1 = f^{(1)}.$$

программа на Mathematica

Примеры лишь иллюстрируют метод, никаких новых результатов.

Пример 1. Для цепочки Вольтерра

$$u_{,t} = u(u_1 - u_{-1})$$

получаем, полагая все постоянные интегрирования равными 0,

$$g_1 = u, \quad g_0 = u + u_1, \quad g_{-1} = \frac{uu_1}{u_{-1}}, \quad g_j = \frac{u(u_1 - u_{-1})}{u_j}, \quad j < -1.$$

В этом случае ряд легко свернуть в настоящий оператор рекурсии

$$G = uT + u + u_1 + uT^{-1} + u(u_1 - u_{-1})(T-1)^{-1}\frac{1}{u}.$$

Обычно это не так просто. Например, для цепочки Богоявленского-2

$$u_{,t} = u(u_2 + u_1 - u_{-1} - u_{-2})$$

имеем:

$$g_2 = u, \quad g_1 = u, \quad g_0 = u + u_1 + u_2, \quad g_{-1} = 0,$$

$$g_{-2} = \frac{1}{u_{-2}}(u_{-1}u_1 + uu_1 + uu_2), \quad g_{-3} = -\frac{1}{u_{-3}}(u_{-2}u + u_{-1}u + u_{-1}u_1),$$

$$g_{-4} = \frac{1}{u_{-4}u_{-2}}((u_{-3} + u_{-2})u_{-1}u_1 + u_{-2}u(u_1 + u_2)), \quad \ldots$$

а для порядка m ещё сложнее. Свернуть таки можно [7]:

$$G = u(1+T^{-1}+T^{-2})(T^2u-uT^{-1})(Tu-uT^{-1})^{-1}(Tu-uT^{-2})(u-uT^{-2})^{-1}.$$

★ Ещё одно применение алгоритма: так как факторы двучленные, то вычисление высших симметрий $G^k(f)$ сводится к решению уравнений вида (4).

[7] Wang, J.P., 2012. Recursion operator of the Narita–Itoh–Bogoyavlensky lattice. Stud. Appl. Math., 129(3), 309–327.

Пример 2. «Классификация» Рассмотрим цепочку с неопределёнными коэффициентами

$$u_{,t} = u(u_2 + k_1 u_1 + k_2 u + k_3 u_{-1} + k_4 u_{-2}).$$

На первом шаге тест (8) выдаёт препятствие

$$(1 + k_2 + k_4)u + (k_1 + k_3)u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -1 - k_4, \quad k_3 = -k_1.$$

После подстановки, g_0 успешно находится, а вычисление g_{-1} упирается в следующее препятствие

$$k_1(k_1 + k_4)(u - u_2) + k_1(k_1 - 1)(u_{-1} - u_1) = 0.$$

Если $k_1 \neq 0$, то $k_1 = 1$, $k_4 = -1$ — цепочка Богоявленского.

Если $k_1 = 0$, то вычисление g_{-2} даёт ещё одно препятствие

$$k_4(1 + k_4)/u_{-2} = 0,$$

и возникают ещё два уравнения (интегрируемые, но неинтересные):

— линеаризуемое $u_{,t} = u(u_2 - u)$;

— растянутая цепочка Вольтерра $u_{,t} = u(u_2 - u_{-2})$.

Пример 3. Согласно [Ямилов 2006], цепочка

$$u_{,t} = h(u_1 - u) + h(u - u_{-1})$$

интегрируема, если h удовлетворяет ОДУ с постоянными коэффициентами

$$h' = P(h) = \alpha h^2 + \beta h + \gamma.$$

Оно решается в элементарных функциях, но рассматривать разные случаи неинтересно. Чтобы обработать все семейство, надо лишь преобразовать b_j, сделав подстановку

```
{h'[x_] :> P[h[x]], h''[x_] :> P'[h[x]]P[h[x]]}
```

После этого g_j находятся из (8) как обычно, суммированием по частям (то есть, Ямилов не обманул).

Пример 4. В предыдущих примерах уравнения проходили тест при произвольных постоянных интегрирования, но это не всегда так. Рассмотрим модифицированную цепочку Богоявленского

$$u_{,t} = u(u_2u_1 - u_{-1}u_{-2}). \tag{9}$$

Для нее $f^{(2)} = uu_1$, поэтому оператор

$$T^2 - T^j(f^{(2)})/f^{(2)}$$

имеет нетривиальное ядро при всех j. Следовательно, константы c_j возникают при решении (8) на каждом шаге. Однако, оказывается, что c_{-2k+1} является препятствием при вычислении g_{-2k}. В результате, тест проходит только, если занулить каждую вторую постоянную. Это говорит о том, что минимальная степень G равна 2, так что (9) не может быть симметрией какого-либо уравнения 1-го порядка.

Заключение

» Задача обращения оператора $T^m - a[u]$ возникает естественным образом в теории интегрируемых цепочек типа голодной Вольтерры.

» Несмотря на это, она, по-видимому, не обсуждалась в литературе, за исключением случая полной разности $T - 1$.

» Мы рассмотрели 3 способа решения:
— суммирование по частям — быстрый метод;
— суммирование геометрической прогрессии — медленно;
— оператор гомотопии (для $T - 1$) — медленно.

» Представленный алгоритм предназначен для тестирования одной отдельно взятой цепочки или, в крайнем случае, семейства с несколькими параметрами.

« Дальнейшие обобщения могут быть связаны с цепочками типа голодной Тоды или Абловица–Ладика (матричные коэффициенты).

« Что касается классификации цепочек порядка > 1, то это совершенно не исследованная задача.